**נושא 15 – עץ אדום שחור**

***עץ אדום-שחור***  *– הינו מבנה נתונים מסוג עץ חיפוש בינארי באוזן בקירוב.*

*עץ אדום-שחור הוא מבנה נתונים מורכב יחסית, אך בשל היותו מאוזן הוא שומר על סיבוכיות זמן ריצה טובה, יעילה ומעשית עבור הפעולות הבסיסיות: הכנסה, הוצאה וחיפוש איברים בזמן בזמן של במקרה הגרוע ביותר, (כאשר הוא מספר הצמתים בעץ בעת ביצוע הפעולה).*

*במבנה הנתונים עץ אדום-שחור לכל צומת מוענק שדה חדש הנקרא צבע בעל ערך אדום או שחור . החוקים הנאכפים על מבנה נתונים, על מנת לשמר איזונו, מתייחסים לשדות הצבע הללו ומכאן מבנה הנתונים קיבל את שמו.*

*בנוסף לדרישות הרגילות של עצי חיפוש בינאריים, עץ אדום-שחור מקיים את הדרישות הבאות:*

1. *צומת הוא שחור או אדום (אחד מן השניים).*
2. *השורש הוא שחור.*
3. *כל העלים שחורים.*
4. *שני ילדיו של צומת אדום הם שחורים.*
5. *כל מסלול פשוט מצומת מסויים לכל אחד מהצאצאים העלים שלו מכיל אותו מספר של צמתים שחורים.*

*דוגמה לעץ אדום-שחור:*

***עוד הגדרות:***

* *הגובה השחור של צומת העץ:*

*מספר צמתים שחורים מקודקוד מסויים לכל אחד מהצאצאים העלים שלו מכונה "הגובה השחור" של הצומת .*

* *הגובה השחור של העץ האו הגובה השחור של שורש העץ*
* *הצמתים הפנימיים של העץ הם קודקודים שאינם .*

***תכונות:***

* *אורכו של המסלול הארוך ביותר מהשורש לכל אחד מן העלים הוא לכל הפחות פעמיים אורכו של המסלול הקצר ביותר מהשורש לאחד העלים.*

*כדי להבין מדוע זה כך נתבונן בתכונות 4,5 של עץ אדום-שחור, נניח שמספר הצמתים השחורים בתכונה 5 שווה ל-, אז המסלול הקצר ביותר משורש העץ עד הצאצאים העלים שלו מכיל צמתים שחורים,ניתן לבנות מסלול ארוך יותר על ידי הוספת עלים אדומים, אבל על פי תכונה 4 לא ניתן להוסיף שני צמתים אדומים ברצ, לכן הדרך הארוכה ביותר האפשרית מורכבת מ- צמתים, לסירוגין אדומים ושחורים.*

* *תת-עץ של עץ אדום שחור בעל קודקודים פנימיים, שורשו הוא מכיל לפחות קודקודים פנימיים,כאשר הוא הגובה השחור של תת העץ, כלומר .*

*הוכחה באינדוקציה לפי :*

*בסיס: עבור , כלומר בתת-עץ יש רק עלה אחד שהוא , אז מספר צמתיים פנימים בתת-עץ הזה שווה , ניקח הצומת הוא שחור ויש כאן שלושה אפשרויות:*

1. *שורש הוא צומת יחיד בעץ ,*
2. *לשורש יש בן אדום אחד ,*
3. *לשורש יש 2 בנים אדומים .*

*בשלושת המקרים מתקיים:*

*הנחה: מספר הצמתים הפנימיים של העץ בעל גובה שחור מקיים את האי-שיוויון: .*

*הוכחה: עבור גובה שחור של .*

1. *שורש של התת-עץ הוא שחור ונניח שיש לו שני בנים, אז הגובה השחור של כל אחד מהבנים הוא שווה ל- בגלל שהגובה של כל אחד מהבנים קטן ב-1 מגובה של עצמו, כלומר שווה ל-, לפי הנחת האינדוקציה מספר הצמתים הפנימיים של כל בן הוא לפחות . לכן העץ המקורי מכיל לפחות .*
2. *שורש תת-העץ הוא אדום, לפי תכונה 4, יש לו 2 בנים שחורים שהגובה השחור של כל אחד מהם הוא (לפי סעיף א'), מספר הקודקודים לכל אחד מהבנים לא יעלה על .*

*לכן מספר הקודקודים של תת-עץ ששורשו הוא אדום מתקיים אי-השיוון:*

*.*

* *גובה של עץ אדום-שחור בעל קודקודים פנימיים לא עולה על , כלומר .*

*הוכחה: הגובה השחור של העץ הוא לפחות , כלומר , מכאן נובע כי , ולכן:*

*.*

***תכונות של פעולות בסיסיות:***

* *הוספה – הכנסת איבר לעץ, תשמור את איזונו של העץ, ניתן לבצע בזמן של .*
* *מחיקה – מחיקת איבר מבוקש מהעץ, ניתן לבצע בזמן של .*
* *חיפוש – חיפוש איבר מבוקש בעץ, ניתן לבצע בזמן של .*

*מכיוון שפעולות אלו משנות את העץ, התוצאה עלולה להפר את התכונות של העץ, כדי לשמור על תכונות העץ עלינו לשנות את צבעיהם של מספר קודקודים, ואף את מבנה ההצבעה.*

*שינוי מבנה ההצבעה נקרא רוטציה, קיימים שני סוגים של רוטציה: רוטציה ימינה , ורוטציה שמאלית – בדיוק כמו בעץ .*

*מוסיפים איבר חדש לעץ בדיוק כמו שמוסיפים לעץ בינארי רגיל וצובעים אותו באדום.*

*בעץ חיפוש בינארי מוסיפים עלה, אבל בעץ אדום-שחור עלה לא מכיל מידע, לכן מוסיפים איבר חדש אדום בעל שני בני-עלים שחורים, עכשיו הכל תלוי בצבעים של הקודקודים שסמוכים אליו.*

*באלגוריתם הוספת איבר חדש יש שני מקרים הקשורים לצבע של "דוד" של איבר חדש, נסמן את האיבר החדש , שלבי ההוספה הם:*

1. *מבצעים הוספת איבר סטנדרטית של עץ חיפוש בינארי וצובעים את באדום,*
2. *אם העץ היה ריק אז הוא שורש העץ, משנים את הצבע שלו לשחור, גובה העץ עולה ב-1, כלומר הופך ל-0 (נזכור כי גובה של עץ ריק הוא , בגללש שגובה של קודקוד שהוא שווה ל—),*
3. *קודקוד האב של הוא שחור, במקרה זה כל התנאים מתקיימים ואין מה לתקן,*
4. *קודקוד האב של הוא אדום ולא שורש (הסב של חייב להיות שחור לפי תכונה 4).*
   1. *הדוד של הוא אדום:*
      1. *משנים את הצבע של קודקוד האב וקודקוד הדוד לשחור,*
      2. *צובעים את קודקוד הסב לאדום,*
      3. *חוזרים רקורסיבית לשלבים 1,2 עם הסב של במקום .*
   2. *הדוד של הוא שחור (האב של הוא , הסב של הוא ):*
      1. *– הוא הבן השמאלי של ו- הוא הבן השמאלי של .*
      2. *– הוא הבן השמאלי של ו- הוא הבן הימני של .*
      3. *– הוא הבן הימני של ו- הוא הבן הימני של .*
      4. *– הוא הבן הימני של ו- הוא הבן שמאלי של .*